Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

2º Examen Parcial (Tipo 2) (50 %)

MA-2112 Abril-Julio 2011

Soluciones.

Pregunta 1. Sea D la región

$$D = \left\{(x,y) \in [0,1]\times[-1,1] \ : \ (x-1)^2+(y-1)^2 \geq 1,\ (x-1)^2+(y+1)^2 \geq 1\right\}$$

a) Exprese la integral doble $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ como integrales iteradas.

b) Invierta el orden de integración anterior.

(12 puntos)

Solución:

a) Expresando la integral como suma de integrales iteradas:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\int_0^{1-\sqrt{1-(y+1)^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

b) Al cambiar el orden de integración:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{1-(x-1)^2}-1}^{-\sqrt{1-(x-1)^2}+1} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

□

Pregunta 2. Usando integrales dobles, encuentre el área de la región acotada por $xy=4$, $xy=8$, $xy^3=5$ y $xy^3=15$.

(12 puntos)

Solución: Hacer $xy=u$ y $xy^3=v$.

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2\end{vmatrix}} = \frac{1}{3xy^3-xy^2} = \frac{1}{2xy^3} = \frac{1}{2v}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \int_4^8 \int_5^{15} \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \int_4^8 \left[\frac{1}{2}\ln v|\right]_5^{15} \mathrm{d}u \\
&= 2\ln 3
\end{aligned}
$$

□

Pregunta 3. Sabiendo que la curva parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t)) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ es simple, use el Teorema de Green para hallar el área encerrada entre ésta y el eje de las x.

(13 puntos)

Solución: Considérese el campo $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$. Usando el Teorema de Green, con $\partial D = C \cup L$ siendo C la curva dada y L el segmento sobre el el eje x:

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(D) &= -\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + -\frac{1}{2}\int_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(t - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t - (1 - \cos t)(1 - \cos t)]\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (0 \cdot 1 - t \cdot 0)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (t \operatorname{sen} t + 2\cos t - 2)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[-t\cos t + 3\operatorname{sen} t - 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi
\end{aligned}
$$

donde el signo $-$ viene dado por la orientacion de la curva. □

Pregunta 4. Usando integrales triples, encuentre el volumen de la región encima del plano xy acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\text{Vol} &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_0^{r^2} r \quad \mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a r^3 \quad \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} [r^4]_0^a \quad \mathrm{d}\theta = a^4\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□

(13 puntos)